JGP Vol. 1, n. 3, 1984

Étude géométrique du monopole magnétique

P.A. HORVÁTHY
Centre de Physique Théorique, CNRS, MARSEILLE

Abstract. *The motion of a charged particle in the field of a Dirac monopole is studied in a geometrical framework.*
The «without string» formalism of Wu and Yang allows for describing the rotational symmetry but turns out to be insufficient to treat the «hidden» symmetries found recently by Jackiw. This task can be done by the geometric quantization of Kostant and Souriau. The relation of the two formalisms is explained in detail.

Résumé. *Le mouvement d'une particule chargée soumise au champ d'un monopole magnétique est étudié dans un cadre géométrique.*
Le formalisme «sans corde» de Wu et de Yang permet d'interpréter géométriquement la symmétrie de rotation mais s'avère insuffisant pour traiter les symétries «cachées» découvertes récemment par Jackiw. Cette tache est accomplie par la quantification géométrique de Souriau et de Kostant. La relation des deux constructions est expliquée en détail.

INTRODUCTION

Depuis son introduction par Dirac [1], les physiciens manifestent un grand intérêt pour le monopole magnétique, malgré l'insuffisance des preuves experimentales [3]. C'est plutôt son intérêt théorique qui attire l'attention: il fournit en effet l'exemple «physique» le plus simple mettant en évidence *les aspects topologiques de la mécanique quantique*.

Le cadre le plus adapté pour comprendre cet aspect est celui de *la géométrie differentielle* et en particular de *la théorie des fibrés et des connexions* [4].

Les premières applications de ces méthodes [5 - 13] consistent pout l'essentiel

Key-Words: Magnetic monopole, geometric quantization, symmetries.
***1980 Mathematics Subject Classification:** 53 C 80.*

à reformuler en termes géometriques des faits bien connus.

Le premier chapitre de ce travail résume ce point de vue appelé «*monopole sans corde*». Le champ electromagnétique créé par un monopole de charge magnétique g qui se trouve au repos à l'origine est décrit par *une forme de connexion* α sur *un fibré en cercles* P au dessus de l'espace de configuration Q. Le champ lui-même est donné par $(\hbar/e)$-fois la courbure de α, où $\hbar$ est la constante de Planck et e est la charge d'une particule d'essai.

Il se trouve que le champ du monopole est en effet donné par la forme de surface de la 2-sphère S^2, multipliée par g. Ceci implique, par l'isomorphisme de Chern-Weil [4, 14] que la célèbre *condition de quantification*

$$(1) \qquad 2eg/\hbar = n \in Z$$

doit être satisfaite. Pour $n \neq 0$ *le fibré P n'est pas trivial*, c'est-à-dire toute section s de P au dessus de Q comporte nécessairement des singularités.

P est construit explicitement à partir de la fibration de Hopf de S^3 au dessus de S^2.

Un potentiel-vecteur est obtenu en prenant l'image réciproque de la forme de connection par une section locale: $\mathbf{A} = (A_j)$ où $A_j \mathrm{d}x^j = s^*\alpha$. Ceci montre que l'apparition d'une ligne de singularité - la «corde de Dirac» [1, 2] - est dûe à la singularité inévitable de toute section.

Il résulte du principe du couplage minimal que le Hamiltonien d'une particule d'essai est donné par

$$(2) \qquad H = -\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})^2.$$

Le Hamiltonien aussi bien que les fonctions d'onde sont singuliers sur la corde par conséquent [35]. Considérons deux sections locales. Dans l'intersection des domaines respectives nous avons à notre disposition deux descriptions apparemment différentes. Mais ces deux descriptions doivent être *physiquement équivalentes*, c'est à dire qu'il doit exister une *transformation de jauge* entre les deux [11]. Or c'est vrai si et seulement si la condition (1) est satisfaite.

Les *fonctions d'onde* «locales», c'est à dire celles que correspondent au choix des sections donnent naissance à un objet *global*, notamment à *une fonction équivariante* sur P qui, quant à elle, est déjà *sans singularité* [16]. Alternativement [4, 14, 15] on peut les considérer comme des sections du fibré en ligne associé [11]. Le Hamiltonien (2) s'exprime dans se cadre comme le carré de la dérivée covariante [6].

Le champ du monopole est aussi le prototype d'un *champ de jauge symétrique* dont le potentiel-vecteur n'est pas invariant.

En effet, un champ de vecteurs X sur Q est appelé une *symétrie* (infinitésimale) du *champ de jauge* si son action sur le potentiel-vecteur (donnée mathématiquement par une dérivée de Lie) peut être compensée par une transformation de jauge [17, 18]:

$$(3) \qquad L_X A = \mathrm{d}(-A(X) + u)$$

Géometriquement [19, 20] ceci revient à demender qu'il existe un champ de vecteurs ξ sur P qui est invariant par l'action de $U(1)$, qui se projette sur X et qui satisfait à

$$(4) \qquad L_\xi \alpha = 0.$$

Si X est additionellement une *isométrie infinitésimale* (vecteur de Killing) pour la métrique de Q, nous obtenons une *symétrie* pour la *particule d'essai* [20].

Nous disposons alors, par le théorème de Noether [18], d'une *quantité conservée f*.

De telles observables sont, en mécanique quantique, représentées par des opérateurs auto-adjoints de la forme

$$(5) \qquad \hat{f} = -i\hbar\, L_X - eA(X) + eu.$$

Or cet opérateur, exprimé sur l'espace des fonctions équivariantes, devient

$$(6) \qquad \hat{f} = -i\hbar\, L_\xi.$$

C'est une dérivée de Lie par le relèvement quantique!

L'exemple classique est celui du *moment angulaire* [35, 13]: (5) nous fournit bien un terme supplémentaire représentant la contribution du champ de jauge au moment angulaire. C'est la version Abélienne de l'effet appelé «spin de l'isospin» [18, 20].

Cette description «sans corde» n'est cependant pas complètement satisfaisante. D'une part, bien qu'elle permette d'interpréter géométriquement certaines observable, elle ne fournit toutefois aucune explication concernant leurs origines.

D'autre part on découvert récemment [25] l'existence de symétries «cachées» qui ne sont ni des symétries de l'espace seul ni des isométries. Il s'agit des *dilatations* et des *expansions* (ou transformations conformes spéciales) [25, 27, 28]:

$$(7) \qquad (\mathbf{x}, t) \to (e^{-\delta/2}\mathbf{x}, e^{-\delta} t), \qquad \delta \in \mathbb{R}$$

$$(8) \qquad (\mathbf{x}, t) \to (\mathbf{x}/(1 - \kappa t),\ t/(1 - \kappa t)) \qquad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Ces symétries engendrent des constantes du mouvement D et K [25]:

$$(9) \qquad D = tH - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/2$$

(10) $$K = -t^2 H + 2tD - m\,|\,\mathbf{x}\,|^2/2.$$

Or, ces observables *dépendent explicitement du temps*. Existe-il une formule analogue à (6) pour les quantifier?

L'objectif de ce travail est de montrer que la *quantification géométrique* [14, 15], sous la forme proposée par *Souriau* [16, 30], permet de donner une réponse affirmative à cette question.

Le Chapitre II constitue une première étape dans cette direction. Notre point de départ est l'expression proposée par *Feynman* [21] pour le propagateur entre deux points (x_0, t_0) et (x_1, t_1) de l'espace-temps:

(11) $$K(x_1, t_1\; x_0, t_0) = \int \exp\left[\frac{i}{h}\, S(\gamma)\right] \mathscr{D}\gamma$$

où apparait *l'action classique* $S(\gamma)$ calculée le long du chemin γ reliant les deux points considérés de l'espace-temps.

(12) $$S(\gamma) = \int \mathscr{L} \mathrm{d}t = \int (m\mathbf{v}^2/2 + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})\, \mathrm{d}t.$$

Or, la présence du potentiel-vecteur introduit ici une singularité. Quelles sont les conséquences physiques?

Nous répondons à cette question en termes géometriques [16, 22, 23, 24]. Nous reformulons d'abord le problème variationnel en termes d'une 1-forme Θ appelée la *forme de Cartan* $S = \int \Theta$. Elle est définie sur «*l'espace d'évolution*» $V = TQ \times R$. Les equations d'Euler-Lagrange s'expriment en demandant que les extrémales soient des courbes caractéristiques de la 2-forme présymplectique

(13) $$\sigma = \mathrm{d}\,\Theta.$$

Dans le cas d'une particule soumise à un champ éléctromagnétique cette 2-forme s'écrit

(14) $$\sigma = \mathrm{d}(mv \cdot \mathrm{d}x - (mv^2/2)\mathrm{d}t) + e\,\mathbb{F} = \mathrm{d}\Theta_0 + e\,\mathbb{F}.$$

La forme σ ne contient plus la singularité du potentiel-vecteur!

Réciproquement, nous pouvons partir d'une forme présymplectique σ donnée sur l'espace d'évolution et définir un problème variationnel en intégrant une solution arbitraire Θ de (13).

Dans le cas du monopole toute solution de (13) aura, d'après (14), une singularité de type «corde». L'action classique correspondante sera définie par conséquent seulement pour des chemins contenus dans le domain du Θ choisi. En prenant une autre solution de (13) l'action changera de manière non-triviale.

Observons que cette ambiguité n'a, au niveau purement *classique, aucune conséquence physique*: les équations du mouvement restent inchangées.

Pour voir ce qui se passe au niveau quantique notons d'abord que l'action classique est *toujours ambigue*: en ajoutant une dérivée totale df/dt au Lagrangien elle sera changée selon $S \to S + \{f(x_1, t_1) - f(x_0, t_0)\}$. Mais ce changement n'a pas d'effet observable puisque il en résulte une multiplication de l'intégrand de (9) par un facteur de phase qui ne dépend pas du chemin choisi. Le propagateur reste alors équivalent au précédent.

Essayons d'appliquer le même raisonnement au cas du monopole: exigeons que *la substitution d'une solution de* (13) *par une autre change le «facteur de Feynman» par un facteur de phase inobservable:*

$$(15) \qquad \exp\left[\frac{i}{\hbar}\, S\right] \to c(x_1, t_1; x_0, t_0) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\, S\right], |c| = 1.$$

Le calcul montre qu'il en est ainsi si et seulement si $\sigma/\hbar$ définit une classe de cohomologie intégrale:

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{S^2} \sigma \in Z.$$

Compte tenu de (14) cela se *réduit à la condition de Dirac* (1).

Or, d'après le lemme de Weil [4, 14, 15], (16) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un *fibré principal en cercles* W au dessus de V qui est muni d'une *connection* ω et dont la courbure est $\sigma/\hbar$. Le couple (W, ω)-appelé la «*préquantification*» *de* (V, σ)-est donné explicitement par

$$(17) \qquad W = (V \to Q)^* P$$

$$(18) \qquad \omega = \Theta_0 + \alpha.$$

Nous avons réussi à introduire, par des arguments différents, les structures du chapitre I!

Avant d'éclaircir la relation précise de ces deux constructions, arrêtons-nous au problème des symétries classiques.

La démarche habituelle [18] en terme d'un Lagrangien se traduit en effet en appelant symétrie classique un champ de vecteurs Z sur V qui laisse la forme σ invariante: $L_Z\sigma = 0$. La quantité conservée associée - le «moment» de Souriau - est une fonction linéaire en Z qui satisfait à

$$\sigma(Z,.) = -\mathrm{d}\, f_Z. \tag{19}$$

Toute solution globale de cette équation fournit un *relèvement préquantique*, c'est à dire un champ de vecteurs Υ sur W qui est invariant par l'action de $U(1)$, qui se projette à Z et qui laisse la forme invariante:

$$L_\Upsilon \omega = 0 \tag{20}$$

Υ est donné explicitement par

$$\Upsilon = \bar{Z} + \tilde{f}_z \tag{21}$$

où $\bar{Z}$ (resp. $\tilde{f}_Z$) sont le relèvement horizontal (resp. champ de vecteurs fondamental) [4] sur le fibré W.

La quantité Noethérienne se reconstruit dans ce cadre comme

$$f = \hbar\ \omega\ (\Upsilon). \tag{22}$$

Notons l'ambiguité de la solution de (19) et par conséquent du relèvement préquantique.

L'application de ces formules aux translations temporelles et aux rotations autour de l'origine fournissent les expressions correctes de l'énergie et du moment angulaire. Pour les dilatations et expansions nous obtenons

$$D = -m\,\boldsymbol{v}\cdot(\mathbf{x} - \boldsymbol{v}\,t)/2 \tag{23}$$

et

$$K = -m(\mathbf{x} - \boldsymbol{v}\,t)^2/2 \tag{24}$$

qui sont identiques à celles de Jackiw (9 - 10) si on y substitue l'énergie.

La terminologie «relèvement préquantique» est justifié au §4: c'est une transformation qui change le facteur de Feynman par un facteur de phase inobservable.

Le chapitre III. est consacré à la quantification complète du système. Nous résumons d'abord la théorie abstraite.

Soit en effet (M, σ) une variété symplectique préquantifiable, c'est à dire nous supposons l'existence d'un fibré en cercle Y muni d'une connection ω et dont la courbure est $\sigma/\hbar$. Une *polarisation réelle* est un feuilletage F qui est isotrope et maximal. Les relèvements horizontaux des feuilles de F formet une *polarisation de Planck* $\mathscr{F}$.

$Y/\mathscr{F}$ est un fibré en cercle au dessus de M/F. Les *fonctions* d'onde sont, en quantification géométrique, des semi-densités (ou demi-formes [14, 35]) équivariantes sur Y qui sont constantes sur les feuilles de $\mathscr{F}$. Une telle semi-densité se décompose:

$$\Phi\cdot\nu \tag{25}$$

où Φ est une fonction équivariante sur Y qui est constante sur les feuilles de $\mathscr{F}$, tandis que ν est une semi-densité sur M/F.

Un préquantomorphisme h se projettant sur le symplectomorphisme g *préserve la polarisation* F si l'image par g de toute feuille de F est encore contenue dans une feuille de F. h préserve alors la polarisation de Planck $\mathscr{F}$. Une telle application se projette en un isomorphisme du fibré $Y/\mathscr{F}$ et à un difféomorphisme b de M/F respectivement. L'*opérateur quantique* associé a la forme

$$\hat{h}(\Phi\, \nu) = (\Phi \circ h)\,(\hat{b}(\nu)) \tag{26}$$

où $b(\nu)$ est l'action du difféomorphisme b sur la semi-densité ν. (26) est un *opérateur unitaire*.

Similairement, une symétrie préquantique Υ se projettant selon la symétrie classique Z qui préserve la polarisation F est représentée par l'*opérateur auto-adjoint*

$$\hat{f}(\Phi\, \nu) = -i\hbar\, L_\Upsilon(\Phi\, \nu) = (-i\hbar\, L_\Upsilon \Phi)\nu - i\hbar \Phi L_X \nu \tag{27}$$

où X est la projection de Z sur M/F.

Cette théorie abstraite peut être réalisée sur l'espace d'évolution V. L'*espace des mouvements* - le quotient de V par le feuilletage caractéristique de σ muni de la 2-forme induite - est une variété symplectique (M, σ). Si (V, σ) est admissible, et est préquantifié par (W, ω), Y est le quotient de W par le feuilletage caractéristique de ω. La forme quantique ω descend à Y par construction.

Soit $q \in Q$ et posons

$$F_q := \begin{cases} \text{rénuion des mouvements classiques qui} \\ \\ \text{passent par } q \text{ à l'instant } t = 0 \end{cases} \tag{28}$$

$F = \cup\{F_q \mid q \in Q\}$ est un feuilletage de W par des sous-variété isotropes maximales se projettant à une polarisation à (M, σ).

La polarisation de Planck correspondante est obtenue en relevant horizontalement à W les courbes contenues dans les feuilles de F.

$W/\mathscr{F} \simeq Y/\mathscr{F}$ s'identifie au fibré P au dessus de $V/F \simeq M/F \simeq Q$. Les fonctions d'onde (25) deviennent de cette manière des fonctions équivariantes Ψ sur P multipliées par une semi-densité de Q. En particulier, si Q est une variété riemannienne orientable, ν peut être choisie d'être le pullback de la racine carrée de l'élément de volume canonique $\mathrm{d}q$, $\nu = (V \to Q)^* \sqrt{\mathrm{d}q}$.

Les opérateurs (26), (27) deviennent

$$\hat{h}(\Psi \sqrt{\mathrm{d}q}) = (\Psi \circ a)\,(\hat{b}(\sqrt{\mathrm{d}q})) \tag{29}$$

et

$$\hat{f}(\Psi\sqrt{\mathrm{d}q}) = (-i\hbar L_\xi \Psi)\sqrt{\mathrm{d}q} - i\hbar\,\Psi L_X\sqrt{\mathrm{d}q} \tag{30}$$

où a (resp. ξ) sont les projections de h (resp. Υ) sur P.

En termes locaux associés à une section s de P au dessus de Q la correspondance $W \to P$ devient

$$\mathscr{F}_q \ni (x, v, t, z) \to \left(q, \exp\left[\frac{i}{h}\; S(x, v, t)\right] \cdot z\right) \tag{31}$$

où $S(x, v, t)$ est l'*action classique* calculée le long du mouvement classique entre les instants o et t. Ceci implique que les fonctions d'onde usuelles $\psi = s^*\Psi$ sont reliées aux représententes locales des $\Phi : W \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(x, v, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\; S(x, v, t)\right]\psi(q). \tag{32}$$

L'opérateur (27) est exprimé localement par l'expression

$$\hat{f}(\varphi\,\nu) = (-i\hbar L_Z\varphi + (-\Theta(Z) + f)\varphi)\nu - i\hbar\varphi L_Z\nu \tag{33}$$

et

$$\hat{f}(\psi\sqrt{\mathrm{d}q}) = (-i\hbar L_X\,\psi + (-\Theta(Z_0) + f_0)\psi)\sqrt{\mathrm{d}q} - i\hbar\,\psi L_X\sqrt{\mathrm{d}q} \tag{34}$$

où Z_0 et f_0 sont les restrictions de Z et de f respectivement à $t = o$.

L'opérateur unitaire (29) s'écrit à son tour

$$\hat{h}(\varphi\,\nu) = (F_h\varphi\circ g)\,(\hat{g}\,\nu) \tag{35}$$

se qui s'exprime sur les fonctions d'onde usuelles comme

$$\hat{h}(\psi\sqrt{\mathrm{d}q})(q) = \left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\; S(g(q, v, o))\right] F_h(q, v, o)\;\psi\;(b(q)\;(\hat{b}\sqrt{\mathrm{d}q})\right. \tag{36}$$

le facteur de phase F_h ici est défini par la forme locale de h,

$$h(x, v, t, z) = (g(x, v, t), F_h(x, v, t)\cdot z) \tag{37}$$

Les formules précédentes s'appliquent en particulier aux symétries «conformes» (7 - 8). Le calcul donne

$$\hat{D} = \frac{i\hbar}{2}\left(r\,\partial/\partial r + \frac{3}{2}\right) \tag{38}$$

et

(39) $\hat{K} = mr^2/2.$

Ces formules sont identiques à celles données par Jackiw [25].

Signalons finalement quelques problèmes reliés mais non étudiés dans ce travail.

Notons d'abord que les translations temporelles ne préservent pas la polarisation que nous avons choisie; l'boservable associée - *l'énergie* - peut être quantifiée par la méthode du «pairing» [14, 30, 35]. Cette technique permet d'ailleurs de faire le lien entre la quantification géométrique et la théorie des *intégrales de Feynman* [31].

Un autre application concerne la *diffusion* [36].

Signalons aussi les résultats intéressants [9, 33] sur la *relation entre le spin et la statistique des dyons* [32].

Avouons finalement que pendant tout le travail nous ignorons l'existence de chutes sur le monopole ce qui introduirait le problème de *régularisation* de la variété des mouvements. Or ce problème semble d'être relié à l'existence des *états liés* [37].

Il est intéressant de noter que les symétries (7 - 8) sont reliées à la structure «conforme» de l'espace-temps non-rélativiste [27].

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier à Jean-Marie Souriau pour son intérêt manifesté à ce travail. Je suis reconnaissant à Christian Duval pour m'avoir envoyé ses notes non publiées concernant la relation entre les symétries conformes (7 - 8) et la structure de l'expace-temps newtonien.

J'exprime ma gratitude à Philippe Blanchard pour son encouragement, ses remarques critiques et suggestions qui ont contribué à l'amélioration du texte.

Chapitre I.

LE MONOPOLE SANS CORDE

1.§ PARTICULE CHARGÉE DANS LE CHAMP DU MONOPOLE

Considérons un monopole de charge magnétique g qui est au repos à l'origine. Son champ est décrit par la 2-forme

$$\mathbb{F} = g \frac{x_i}{|x|^3} \cdot \mathrm{d}\, x_j \otimes \mathrm{d}\, x_k \in_{ijk} \tag{I.1.1}$$

sur l'espace de configuration $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^+ \times S^2$. On constate que c'est le pull-back par la projection $Q \to S^2$ de Ω, la 2-forme canonique de surface de S^2:

$$\mathbb{F} = g(Q \to S^2)^* \, \Omega. \tag{I.1.2}$$

Ceci entraine qu'il n'existe pas de potentiel-vecteur sans singularité: $F = \mathrm{d}A$ (où $A = A_j \, \mathrm{d}x^j$) impliquerait en effet, par le théorème de Stokes que l'intégrale de F sur une 2-sphère centrée sur l'origine est nulle. Or le calcul direct donne $4\pi g$, soit, une contradiction.

Le lemme de Poincaré [4, 14, 16] assure par contre l'existence locale de potentiels-vecteurs:

$$\mathbb{F} = \mathrm{d}A \tag{I.1.3}$$

admet en effet une solution dans tout ouvert difféomorphe à $\mathbb{R}^3$. Choisissons par example pour U_+ (resp. U_-) $R^3 \setminus \{$le demi-axe z positif$\}$ (resp. negatif). Des solutions correspondantes - uniques à une dérivée totale près - sont données en coordonnées sphériques (r, Θ, Φ) par l'expression

$$A_\pm = \pm\, g(1 \mp \cos\Theta)\, \mathrm{d}\,\phi. \tag{I.1.4}$$

Considérons maintenant une particule chargée sans spin soumise au champ du monopole. Son Hamiltonien s'écrit, d'après le principe du couplage minimal,

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}(-i\hbar\,\nabla - e\,\mathbf{A})^2 \tag{I.1.5}$$

où m est la masse de la particule, et $\mathbf{A} = (A_j) \in R^3$. Cet opérateur est défini, bien endendu, seulement là où le potentiel-vecteur est non-singulier. Sur U_+ par example $\hat{H}_+$ opère sur ψ_+, tandis que sur U_- c'est H_- (défini par A_-) qui opère sur ψ_-. Dans l'intersection de U_+ et de U_- nous disposons alors de deux descriptions différentes. Pour que le problème soit physiquement bien défini il faut clairement que ces deux descriptions soient équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe une *transformation de jauge* $c : U_+ \cap U_- \to U(1)$ telle que dans $U_+ \cap U_-$

(I.1.6.a) $$\psi_+(x) = c(x)\,\psi_-(x)$$

(I.1.6.b) $$(\hat{H}_+\,\psi_+)(x) = c(x)(\hat{H}_-\psi_-)(x)$$

(I.1.5) entraine qu'il en est ainsi si et seulement si

(I.1.7) $$A_- - A_+ = (\hbar/e)\,\mathrm{d}c/ic$$

(I.1.7) s'intégre immédiatement:

(I.1.8) $$c(r, \Theta, \phi) = e^{i(2eg/\hbar)\phi}.$$

C'est une fonction bien définie si et seulement si la *condition de quantification*

(I.1.9) $$2\,eg/\hbar = n \in \mathbb{Z}$$

est satisfaite.

D'une manière plus générale, considérons un recouvrement de Q par des ouverts contractibles U_k dans lesquels (I.1.3) admet les solutions $A^{(k)}$. Soit H_k le Hamiltonien correspondant, opérant sue la fonction d'onde ψ_k. Les descriptions locales sont compatibles s'il existe des transformations de jauge

(I.1.10) $$c_{jk} : U_j \cap U_k \to U(1)$$

telles que pour tout $x \in U_j \cap U_k$

(I.1.11.a) $$\psi_j(x) = c_{jk}(x)\,\psi_k(x)$$

(I.1.11.b) $$(\hat{H}_j\,\psi_j)(x) = c_{jk}(x)(\hat{H}_k\,\psi_k)(x)$$

ce qui est possible si et seulement si

(I.1.12) $$A^{(k)} - A^{(j)} = (\hbar/e)\,\mathrm{d}c_{jk}/ic_{jk}.$$

La solution de (I.1.12) est obtenue par intégration:

(I.1.13) $$c_{jk}(x) = \exp\left[(-ie/\hbar)\int_{x_0}^{x} (A^{(j)} - A^{(k)})\right]$$

où x_0 est choisi arbitrairement et l'intégration est effectuée le long d'un chemin quelconque joignant x_0 à x. c_{jk} est bien définie dans des domaines simplement connexes; pour qu'elle soit partour dans $U_j \cap U_k$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{(I.1.14)} \qquad \exp\left[(ie/\hbar)\oint A^{(j)}\right] = \exp\left[(ie/\hbar)\oint A^{(k)}\right].$$

(I.1.14) a été choisie par Wu et Yang [10] comme point de départ de la formulation de la théorie de jauge en termes du «facteur de phase non-intégrable».

Remarquons qu'à présent nous avons démontré que la condition (I.1.9) est nécessaire pour avoir une mécanique quantique raisonnable. Le fait qu'elle soit suffisante découlera de la reformulation géométrique qui va suivre.

2.§ REFORMULATION GÉOMETRIQUE: REMARQUES GÉNÉRALES

Les fésultats de la section précédente sont susceptibles d'une reformulation en termes de fibrés et de connexions [4, 14].

Les c_{jk} vérifient en effet les conditions de cocycle

$$\text{(I.2.1.a)} \qquad c_{jj} = 1 \text{ dans } U_j \qquad \forall j$$

$$\text{(I.2.1.b)} \qquad c_{jk}c_{kj} = 1 \text{ dans } U_j \cap U_k \qquad \forall j, k$$

$$\text{(I.2.1.c)} \qquad c_{jk}c_{k\ell}c_{\ell j} = 1 \text{ dans } U_j \cap U_k \cap U_\ell \quad \forall j, k, \ell.$$

Les c_{jk} sont par conséquent les fonction de transition d'un *fibré en cercles P au dessus de Q* [4, 14, 15, 16]. Rappellons-nous que ce fibré défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de paires $(x, z) \in Q \times U(1)$ où $(x_j, z^j) \sim (x_k, z^k)$ si $x_j = x_k = x \in U_j \cap U_k$ et $z^j = c_{jk}(x)\, z^k$.

La formule (I.1.12) entraine l'existence d'une *forme de connexion* α sur P. Elle est donnée localement par

$$\text{(I.2.2)} \qquad \alpha = (e/\hbar)\, A^{(j)} + \mathrm{d}z^j/iz^j$$

$\mathrm{d}\alpha$, la courbure de α, descend à Q; (I.2.2) montre que c'est $e\,\mathbb{F}/\hbar$.

L'isomorphisme de Chern-Weil [4] identifie l'entier $n = 2\,eg/\hbar$ avec la première classe de Chern du fibré P.

Une section locale de P est une application s d'un ouvert $U \subset Q$ dans P qui, composée avec la projection $\pi : P \to Q$, donne l'identité. Un potentiel-vecteur $\mathrm{A} = (A_j)$ est défini en prenant le pull-back de α par une section: $A_j\, \mathrm{d}x^j = (\hbar/e)s^*\alpha$. Deux sections s_j et s_k sont reliées dans l'intersection de leurs domains par une transformation de jauge $s_k(x) = c_{jk}(x)\; s_j(x)$. Les potentiel-vecteurs correspondant satisfont alors à (I.1.12). (I.1.10 - 12) est une conséquence de l'existence du fibré P qui, à son tour, découle de la condition de Dirac appliquée au recouvrement de Q par $U_+ \cup U_-$.

Considérons maintenant les fonctions d'onde. Observons que

$$z^j \psi_j(x) = z^k \psi_k(x) \tag{I.2.3}$$

si $(x, z^j) \sim (x, z^k)$ définissent le même point $p \in P$. Nous pouvons appeler cette valeur commune de (I.2.3) $\Psi(p)$.

La fonction Ψ ainsi définie est équivariante par rapport à l'action $p \to pz$, $z \in U(1)$ de $U(1)$ sur P:

$$\Psi : P \to \mathbb{C}; \quad \Psi(pz) = z\Psi(p), \qquad p \in P, z \in U(1) \tag{I.2.4}$$

Si Ψ_1 et Ψ_2 sont deux fonctions équivariantes sur P, le produit $\Psi_1 \Psi_2$ est une fonction sur Q que nous pouvons intégrer par la mesure Riemannienne de $\mathbb{R}^3$ dont Q est une sous-variété ouverte. Le produit scalaire de Ψ_1 et de Ψ_2 est donné par

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int_Q \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \, \mathrm{d}q. \tag{I.2.5}$$

L'espace de Hilbert des fonctions d'onde est la complétition de l'espace des fonctions équivariantes sur P.

Cette intérpretation est équivalente à celle de Wu et Yang [11] qui identifient les fonctions d'onde avec des sections d'un fibré en ligne. C'est un théorème bien connu [4, 14, 15].

Nous voulons trouver maintenant une intérpretation géométrique aux *opérateurs* qui représentent les observables quantiques.

Commençons par l'impulsion:

$$(\hat{p}_k^{(j)} \psi_j)(x) = -i\hbar L_{\partial_k} \psi_j + e A_k^{(j)} \cdot \psi_j(x) \tag{I.2.6}$$

où l'indice j refère au choix d'une section s_j et la dérivée de Lie L_{∂_k} est en effet la dérivée partielle dans la direction de l'axe k, $k = 1, 2, 3$.

L'objet géométrique correspondant se définit, selon (I.2.3), par

$$(\hat{p}_k \Psi)(p) = z^j p_k^{(j)} \psi_j(x), \quad p \simeq (x, z^j). \tag{I.2.7}$$

Or, l'équivariance implique que c'est exactement la dérivée de Lie de Ψ par $\bar{\partial}_k$, le relèvement horizontal à P du champ de vecteurs ∂_k sur Q. Rappelons que le relèvement horizontal d'un champ de vecteurs X est le champ de vecteurs unique $\bar{X}$ qui est invariant par rapport de l'action de $U(1)$ sur P, qui se projette sur X et qui annule la forme de connexion, $\alpha(\bar{X}) = 0$. Il s'écrit localement

$$\bar{X}(x, z^j) = (X(x), (-ie/\hbar) A^{(j)}(X) z^j). \tag{I.2.8}$$

L'opérateur impulsion est par conséquent la dérivée covariante:

(I.2.9) $$\hat{p}_k = -i\hbar L_{\bar{\partial}_k}.$$

Le Hamiltonien est, d'après (I.1.5), un multiple du carré de $\hat{\mathbf{p}} = \hat{p}_k$).

Avant d'étudier d'autres observables écrivons quelques formules explicites valables pour le monopole.

3. § FORMULES EXPLICITES POUR LE MONOPOLE

Après ces remarques générales retournons à l'étude proprement dite du monopole.

Considérons la sphère $\mathbb{S}^3$ plongée dans $\mathbb{C}^2$ [16]

(I.3.1) $$\mathbb{S}^3 = \{\zeta = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, \bar{\zeta}\zeta = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

$U(1)$ opère sur $\mathbb{S}^3$ selon $(z_1, z_2) \to (z_1 z, z_2 z)$, $z \in U(1)$. S^3 est ainsi un fibré en cecle. Une orbite de $U(1)$ s'identifie avec l'image réciproque par π d'un point de $\mathbb{S}^2$. Cette projection π est donnée par

(I.3.2) $$(\pi(\zeta))_k = \bar{\zeta}\, \sigma_k \zeta, \quad k = 1, 2, 3$$

où les σ_k sont des matrices de Pauli.

(I.3.3) $$\bar{\zeta}\, \mathrm{d}\, \zeta/i$$

définit, à son tour, une forme de connexion sur S^3.

Le champ du monopole est décrit, pour $2eg/\hbar = n \in \mathbb{Z}$, par

(I.3.4.a) $$P := \mathbb{R}^+ \times \Sigma_n$$

(I.3.4.b) $$\alpha := n\, \bar{\zeta}\, \mathrm{d}\, \zeta/i$$

où la variété Σ_n est obtenue à partir de S^3 par la méthode de «fusion» $\Sigma_n = S^3/\mathbb{Z}_n$, le quotient de la 3-sphère par le groupe cyclique d'ordre n.

$S^3 \simeq SU(2)$ peut être paramétrisé par les angles d'Euler (Θ, ϕ, χ), $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant \chi \leqslant 2\pi$. La matrice d'un élément g de $SU(2)$ s'écrit

(I.3.5) $$[g] = \begin{pmatrix} e^{i(\phi+\chi)/2} \cos \Theta/2 & e^{i(\phi-\chi)/2} \sin \Theta/2 \\ e^{i(\chi-\phi)/2} \sin \Theta/2 & e^{-i(\phi+\chi)/2} \cos \Theta/2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\zeta_0 = (1, 0)$ le «pole nord» de S^3. Pour tout $\zeta \in \mathbb{S}^3$ il existe un $g \in SU(2)$ unique tel que $\zeta = g\, \zeta_0$. On a alors la représentation

(I.3.6) $$\zeta = \begin{pmatrix} e^{i(\phi+\chi)/2} \cos \Theta/2 \\ e^{-i(\phi-\chi)/2} \sin \Theta/2 \end{pmatrix}.$$

Un point de Σ_n est repéré par

$$\begin{pmatrix} e^{in(\phi+\chi)/2}\cos\Theta/2 \\ e^{-in(\phi-\chi)/2}\sin\Theta/2 \end{pmatrix} \tag{I.3.7}$$

Soit $U_+ = \{(r,\Theta,\phi) \mid 0 \leqslant \Theta < \pi\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$ et soit la section $s_+ : U \to P$ définie par

$$s_+(r,\Theta,\phi) = \left(r, \begin{pmatrix} \cos\Theta/2 \\ i\sin\Theta/2 \;\; e^{-in\phi} \end{pmatrix}\right) \tag{I.3.8}$$

La trivialisation locale correspondante est obtenue par $P \ni p = (r,\zeta) \simeq (\mathbf{x}, z_+)$ où

$$z_+ = e^{in(\phi-\chi)/2}. \tag{I.3.9}$$

Il est immédiat de montrer que $s_+^*\alpha$ est exactement (I.1.4).

4.§ SYMÉTRIE DE ROTATION

Un autre aspect du champ du monopole que les physiciens ont longuement apprécié [35] est que, malgré la symétrie parfaite du champ, le potentiel-vecteur n'est pas invariant par rotations. La définition correcte d'un champ de jauge symétrique est plus subtile: un champ de jauge donné par un potentiel-vecteur A est appelé en effet [17, 18] symétrique par rapport à une transformation infinitésimale (champ de vecteurs) X si le changement de A peut être compensé par une transformation de jauge:

$$L_X A = \mathrm{d}\,a \tag{I.4.1}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\mathbb{F}(X, .\,) = -\mathrm{d}u \tag{I.4.2}$$

avec la notation

$$u = A(X) - a. \tag{I.4.3}$$

C'est bien le cas des rotations pour le champ du monopole. Une rotation infinitésimale est connée par

$$X(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \simeq so(3)) \tag{I.4.4}$$

(I.4.2) a dans ce cas pour solution

$$u = -g\,\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega}/|\mathbf{x}|. \tag{I.4.5}$$

Ces formules possèdent une interprétation géométrique [19, 20]. Considérons en effet

$$\xi_{(x,z)} = (X(x), (-ie/\hbar)\, a\, z). \tag{I.4.6}$$

Les règles de transformation du potentiel-vecteur sous l'action d'une transformation de jauge impliquent des règles analogues pour a dans (I.4.1),ce qui montre à son tour que (I.4.6) définit un champ de vecteurs ξ sur P. Ce champ de vecteurs est invariant par l'action de $U(1)$ et vérifie, compte tenu de (I.2.2),

$$L_\xi \alpha = 0. \tag{I.4.7}$$

C'est la définition géométrique d'une symétrie du champ de jauge. Notons que la fonction u de (I.4.2) se reconstruit, puisque $\mathrm{d}\alpha = e\,\mathbb{F}/\hbar$, par

$$u = (\hbar/e)\,\alpha(\xi). \tag{I.4.8}$$

Ce relèvement peut être introduit directement, par une formule purement géometrique. Soit $c \in \mathbb{R}$ un nombre réel arbitraire. Le champ de vecteurs fondamental associé à c est défini par

$$\tilde{c}(p) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\, e^{(ie/\hbar)tc}\right)_{t=0} \tag{I.4.9}$$

ce qui s'écrit localement

$$\tilde{c}(x, z) = (0, (iec/\hbar)\, z). \tag{I.4.10}$$

La comparaison de (I.4.6) et de (I.2.8) qui donne le relevèment horizontal nous fournit alors

$$\xi = \bar{X} + \tilde{u} \tag{I.4.11}$$

Dans le cas du champ du monopole la situation est particulièrement simple. Au lieu de recoller des expressions locales comme nous venons de l'expliquer, nous pouvons travailler directement sur la fibré P. Le relèvement d'une rotation infinitésimale est en effet associé à l'action de $su(2)$ sur $S^3 \simeq SU(2)$. Un vecteur $\boldsymbol{\omega} = (\omega^k)$ de $\mathbb{R}^3$ s'identifie à la matrice

$$\omega = -\frac{i}{2}\,\sigma_k\,\omega^k \in su(2). \tag{I.4.12}$$

Le champ de vecteurs qui correspond à l'action infinitésimale de $su(2)$ sur $SU(2)$ s'écrit

$$\xi(\zeta) = \omega\zeta = -\frac{i}{2}\,\sigma_k\,\zeta\,\omega^k \tag{I.4.13}$$

ξ se projette évidemment sur une rotation infinitésimale de $\mathbb{S}^2$. Il laisse d'autre part invariante la forme de connexion (I.3.4.b). Le relèvement quantique est finalement la projection de ce ξ sur $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_n$. La fonction f calculée précedemment (I.4.5) est retrouvée d'ailleur directement en utilisant (I.4.8).

Considérons maintenant une particule d'essai soumise au champ d'un monopole. Il a été remarqué [35] que l'expression habituelle $\hat{l} = \mathbf{x} \times (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})$ du moment angulaire ne commute pas avec le Hamiltonien et doit être remplacée par

(I.4.14) $$\hat{l} = \mathbf{x} \times (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}) - eg\,\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$$

l'apparition du terme supplémentaire $-eg\,\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ ici est dûe à la noninvariance du potentiel-vecteur. Elle représente la contribution du champ de jauge au moment angulaire illustrant l'effet appelé «spin de l'isospin» [18, 20].

Or cette formule s'interprète géométriquement: l'équivariance des fonctions d'onde géométriques (I.2.4) a pour consequence

(I.4.15) $$L_{\tilde{c}}\Psi = (iec/\hbar)\,\Psi$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$ (notation (I.4.9)). (I.4.14) devient, par (I.2.8) et (I.4.10)

(I.4.16) $$\boxed{\hat{l}\Psi = -i\hbar L_{\overline{X}}\Psi - i\hbar L_{\tilde{u}}\Psi = -i\hbar L_{\xi}\Psi.}$$

Cette même formule s'applique à tout champ de vecteurs X sur Q qui est simultanément

– une isométrie infinitésimale (vecteur de Killing) pour la métrique de Q
– une symétrie du champ de jauge.

L'opérateur (I.4.16) – où ξ est évidemment la relèvement (I.4.7) de X – est auto-adjoint et commute avec le Hamiltonien.

5.§ REMARQUES CRITIQUES

La théorie des fibrés et des connexions nous permet, comme nous venons de le voir, d'interpréter géométriquement quelques-unes des propriétés typiques du monopole. Elle ne les explique cependant pas.

Cette remarque est valable en particulier pour les *symétries*. La règle (I.4.16) est d'ailleur trop restrictive: elle ne permet de quantifier que les observables associées aux symétries de l'espace seul. Or, il existent d'autre symétries découvertes récemment [25] qui ne sont, pas de ce type. Il s'agit des symétries «conformes»

(I.5.1) $$(\mathbf{x}, t) \to (e^{-\delta/2}\mathbf{x}, e^{-\delta} t) \qquad (\delta \in R)$$

et

$$(x, t) \to (x/(1 - \kappa t), t/(1 - \kappa t)) \qquad (\kappa \in R) \tag{I.5.2}$$

appelées *dilatations* et *expansions* (ou transformations conformes spéciales) respectivement.

Ces transformations *dépendent explicitement du temps* et ne sont pas, même pour t fixé, des isométries de l'espace.

Un autre inconveniant de l'approche «sans corde» est qu'elle ne rend pas transparent le lien entre symétries classiques et quantiques.

Le but de ce travail est de présenter une théorie plus générale susceptible de répondre aux questions ci-dessus.

Chapitre II

ACTION CLASSIQUE ET PRÉQUANTIFICATION

1.§ SYSTEMES ADMISSIBLES DU POINT DE VUE QUANTIQUE

L'origine de l'insuffisance de l'approche «sans corde» est clairement qu'elle ne tient pas compte de la dynamique complète. Un telle formulation est fournie, par exemple, par *Feynman* [21]. L'objet central à considérer est le propagateur entre deux points de l'espace-temps (x_0, t_0) et (x_1, t_1) exprimé comme une intégrale sur tous les chemins entre ces deux points:

$$K(x_1, t_1 \,|\, x_0, t_0) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\, S(\gamma)\right] \mathscr{D}\gamma \tag{II.1.1}$$

où $S(\gamma)$ est l'action classique calculée le long du chemin γ:

$$S(\gamma) = \int \mathscr{L}(\gamma(t), \gamma'(t), t)\, \mathrm{d}t. \tag{II.1.2}$$

Il est utile de transcrire le problème variationnel en language géometrique [16, 22, 23, 24]. Considérons la variété $V := TQ \times \mathbb{R}$ appelée l'*espace d'évolution*. Un chemin γ arbitraire se relève à V d'une manière canonique: $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t), t) \subset V$. Il existe alors une 1-forme Θ unique sur V ayant la propriété

$$S(\gamma) = \int_{\tilde{\gamma}} \Theta \tag{II.1.3}$$

notamment

$$\Theta := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j}\, \mathrm{d}x^j - \left(\mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j}\, v^j\right) \mathrm{d}t \tag{II.1.4}$$

Θ est appelé la *forme de Cartan* du système.

Pour une particule sans spin de masse m soumise à un potentiel electromagnétique $\mathbf{A}$ $\mathscr{L} = mv^2/2 + e\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v}$ et par conséquant

(II.1.5) $$\Theta = \Theta_0 + eA = m\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - (m\boldsymbol{v}^2/2)\,\mathrm{d}t + eA$$

où $A = A_j\,\mathrm{d}x^j$.

Les extrémales du problème variationnel sont trouvées en cherchant les courbes caractéristiques de la 2-forme

(II.1.6) $$\sigma = \mathrm{d}\Theta.$$

Cette 2-forme σ est fermée ($\mathrm{d}\sigma = 0$) et son noyau est, pour des Lagrangiens réguliers, de dimension 1. Elle munit V d'une *structure présymplectique*.

Dans le cas d'une particule chargée dans un champ magnétique σ s'écrit, utilisant (II.1.4)

(II.1.7) $$\sigma = \mathrm{d}(mv^j - eA_j)\,\mathrm{d}x^j - (m\boldsymbol{v}^2/2)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,\Theta_0 + e\,\mathbb{F}.$$

Observons que, dans le cas du monopole, la 1-forme (II.1.5) et par conséquant l'action (II.1.3) sont singlulières sur la corde. La 2-forme σ par contre ne comporte plus de singularité. C'est pourquoi nous adopterons le point de vue de Souriau [16] qui considère la *variété présymplectique* (V, σ) *comme fondamentale pour caractériser le système classique.*

Soit donnée une telle variété présymplectique (V, σ). L'équation (II.1.6) admet, par le lemme de Poincaré, une solution Θ dans tout ouvert contractible $U \subset V$ (II.1.3) associe à son tour une «action classique» à toute solution Θ. Observons que cette action est

– nécessairement locale, c'est-à-dire définie pour des courbes entièrement contenues dans U;

– en choisissant une solution locale de (II.1.6) l'action classique sera changée en général d'une manière non triviale.

Il est naturel de se demander si ces faits ont des conséquences physiques.

Au niveau purement *classique* la réponse est négative: les équations du mouvement sont exprimées en termes de σ et sont ainsi inchangées.

Pour comprendre les conséquences quantiques observons que, d'après (II.1.1), c'est l'exponentielle de l'action, ou plus précisément le «facteur de Feynman»

(II.1.8) $$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right]$$

qui joue un rôle décisif.

Observons que cette expression est *toujours ambigüe*: en ajoutant une dérivée totale $\mathrm{d}f$ à une solution Θ arbitraire nous aurons encore une solution. Cette substitution change l'action par $(f(x_1, t_1) - f(x_0, t_0))$. Mais ce changement n'a pas d'effets observables puisque le facteur de Feynman sera multiplié lors de cette substitution par un *facteur de phase qui ne dépend pas du chemin*:

(II.1.9) $$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \to c(x_1, t_1; x_0, t_0) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right]$$

où $c(x_1, t_1; x_0, t_o) = \exp(i/\hbar)\{f(x_1, t_1) - f(x_0, t_0)\}$.

Le facteur de Feynman sera multiplié par ce même facteur de phase et reste ainsi équivalent à l'expression précedente.

Cette observation nous conduit à appeler (V, σ) un *système admissible pour la mécanique quantique* si la substitution d'une solution quelconque par une autre modifie le facteur de Feynman de la manière (II.1.9).

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins qui relient les deux points de l'espace-temps. Le quotient des facteurs de Feynman associés à ces chemins sera, par (II.1.9), indépendant du choix de la forme Θ. Ceci revient à demander que

(II.1.10) $$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\oint\Theta\right]$$

ait une valeur qui ne dépend pas du choix de la forme Θ [10]. Réciproquement, (II.1.9) découle de cette condition qui, à son tour, possède une formulation cohomologique [4, 14, 15].

Soient en effet Θ_1 et Θ_2 deux solutions de (II.1.6) sur des ouverts contractibles U_1 et U_2 respectivement. Notre lacet peut être considéré comme le bord de surfaces dans U_1 (resp. dans U_2). L'indépendance de (II.1.10) du choix de Θ se traduit alors, d'après le théorème de Stokes, par

(II.1.11) $$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{S^2}\sigma\right] = 1 \quad \text{ou} \quad (1/2\pi\hbar)\int_{S^2}\sigma \in \mathbb{Z}.$$

Or, par (II.1.7) (II.1.11) implique

(II.1.12) $$\frac{e}{2\pi\hbar}\int_{S^2}\mathbb{F} \in \mathbb{Z}.$$

Compte tenu de la forme (I.1.2) du champ, cette formule donne pour le monopole exactement *la condition de Dirac* (I.1.9)!

Le fait que (II.1.12) soit aussi suffusante pour que le système soit admissible découlera de la reformulation géométriques ci-dessous.

2.§ PRÉQUANTIFICATION

Supposons la condition (II.1.11) satisfaite. Le lemme de Weil [4, 14, 15] assure alors l'existence d'un fibré principal en cercle W muni d'une connection ω au dessus de V et dont la courbure est $\sigma/\hbar$. Suivant Souriau [16] nous appellerons W «*l'espace d'évolution quantique*», ω «*la forme quantique*», le couple (W, ω) la *préquantification* de (V, σ). Il résulte de (II.1.12) que (V, σ) est préquantifiable si et seulement si le fibré (P, α) existe. Si Q est simplement connexe, ce que nous supposerons dans la suite, les constructions sont uniques. La préquantification (W, ω) est obtenue alors à partir de (P, α):

(II.2.1.a) $$W = (V \to Q)^* P$$

(II.2.1.b) $$\omega = (1/\hbar)\Theta_0 + \alpha.$$

(II.2.1.a - b) est la formulation géométrique du principe du couplage minimal.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer quelques propositions.

Le facteur de Feynman a été, jusque'à présent, défini uniquement pour des courbes contenues dans le domaine $U \subset V$ de la forme Θ choisie. Or l'expression (II.1.1) du propagateur nécessite une définition valable pour tout γ. Ceci est possible de la manière suivante: Soit $\gamma \subset V$ une courbe arbitraire. Son relèvement borizontal à W passant par $w \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ est l'unique courbe $\bar{\gamma}$ qui se projette sur γ et dont le vecteur tangent $\bar{\gamma}'$ annule ω : $\omega(\bar{\gamma}') = 0$.

Choisissons une section s de W au dessus de $U \subset W$, et soient $\bar{\gamma}(0) \simeq (x_0, v_0, t_0, z_0)$, $\bar{\gamma}(1) \simeq (x_1, v_1, t_1, z_1)$, $\Theta = (1/\hbar) s^*\omega$ (I.2.8) (avec A remplacé par Θ) montre que

(II.2.2) $$z_1 = \left(e^{-(i/\hbar)}\int_\gamma \Theta\right) z_0.$$

Cette formule permet *d'étendre la définition* du facteur de Feynman aux courbes dont les extrémitées sont contenues dans U

(II.2.3) $$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right] := z_0/z_1.$$

Cette définition possède les propriétés requises à condition que la section s soit une fonction des positions seules. Une telle section s'identifie en effet avec une section de P au dessus de Q. Θ aura alors la forme (II.1.5). Si on choisit une autre solution Θ qui satisfait à ces conditions, les deux potentiel-vecteurs seront reliés par une transformation de jauge (I.1.12). Le facteur de Feynman change lors de cette substitution:

$$\text{(II.2.4)} \qquad \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \to (c(x_0)/c(x_1)) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right].$$

Il est facile de caractériser l'ambiguité de l'action (II.1.3).

Soit en effet $q \in Q$ un point de référence arbitraire et choisissons, pour tout $x \in Q$, un chemin γ_x qui relie q à x. Ecrivons $f(x) := S(\gamma_x)$. On vérifie immédiatement que, pour un γ arbitraire reliant x_0 à x_1,

$$S(\gamma) = S(\gamma_{x_1}^{-1} \circ \gamma \circ \gamma_{x_0}) - (f(x_0) - f(x_1)).$$

Appliquons cette formule à deux 1-formes Θ_1 et Θ_2. La différence des actions s'écrit, d'après le théorème de Stokes

$$\text{(II.2.5)} \qquad S_1(\gamma) - S_2(\gamma) = \int_{S^2} \sigma + (f_2 - f_1)|_{x_0}^{x_1}.$$

C'est-à-dire, à un terme de surface près, l'ambiguité de l'action est caractérisée par le terme $\int_{S^2} \sigma$ qui, dans le cas du monopole, devient $4\pi eg$ [12].

Choisir une solution locale pour (II.1.6) revient à choisir une section de W au dessus de V. Soit en effet Θ une solution sur un ouvert contractible $U \subset V$. La restriction de W à U est nécessairement contractible la cohomologie de U étant triviale [4, 14, 15]. Soit c la section $c(u) = (u, 1)$.

$\Theta^* := c^*\omega$ est aussi une solution de (II.1.6) au dessus de U, et ainsi

$$\text{(II.2.6)} \qquad \Theta = \Theta^* + (\hbar/i)\, \mathrm{d}f/f$$

où

$$\text{(II.2.7)} \qquad f(u) = \exp\left[(i/\hbar)\int_u^u (\Theta - \Theta)^*\right] \qquad u \in U$$

$s(u) := c(u)f(u) = (u, f(u)^0)$ est alors une autre section de W au dessus de U et le calcul montre que $\Theta = s^*\omega$.

3.§ SYMÉTRIES CLASSIQUES ET QUANTITÉS CONSERVÉES

Avant de passer à la quantification proprement dite nous examinons le problème des symétries et des quantités conservées.

La définition habituelle [18] àl'aide d'un Lagrangien se traduit en effet de la manière suivante: une symétrie (infinitésimale) est un champ de vecteurs Z sur l'espace d'évolution tel que

(II.3.1) $$L_Z \Theta = \mathrm{d} w_Z .$$

Un telle transformation laisse la forme $\sigma = \mathrm{d}\,\Theta$ invariante

(II.3.2) $$L_Z \sigma = 0$$

et par conséquant les équations de mouvement sont inchangées. Nous adopterons, avec Souriau [16] (II.3.2) comme définition d'une symétrie classique.

Le théorème de Noether (soit sous sa forme conventionnelle soit sous sa forme symplectique) fournit alors la quantitée conservée

(II.3.3) $$f_Z = \Theta(Z) - w_Z .$$

Cette fonction f satisfait en effet à l'équation du «moment» [16]

(II.3.4) $$\sigma(Z, .\,) = -\mathrm{d} f_Z .$$

Or toute solution de cette équation définit un *relèvement préquantique* de Z, c'est à dire un champ de vecteurs Υ sur W qui est invariant par l'action de $U(1)$ sur W, se projette sur Z et qui laisse la forme quantique invariante:

(II.3.5) $$L_\Upsilon \omega = 0.$$

Un tel champ de vecteurs sera appelé une *symétrie préquantique*.

Le même raisonnement qu'au chapitre I. s'applique en effet à notre cas; il suffit de remplacer $\mathbb{F}$ par σ, α par ω, X par Z. La symétrie préquantique Υ s'écrit localement:

(II.3.6) $$\Upsilon(x, v, t; z) = (Z(x, v, t); (-i/\hbar) w_Z \cdot z)$$

ce qui se traduit en language géométrique par la formule

(II.3.7) $$\Upsilon = \bar{Z} + \tilde{f}_Z .$$

Notons que le relèvement quantique n'est pas unique: la solution de (II.3.1) est, pour des V simplement connexes, définie à une constante près. Cette ambiguité est toujours présente si nous considérons une symétrie seule. Pour des symétries à plusieurs paramètres le problème de l'ambiguité est resolue en termes cohomologiques [14, 16].

La quantité Noetherienne peut être reconstruite à partir du relèvement quantique:

(II.3.8) $$f_\Upsilon = \hbar\, \omega\, (\Upsilon)$$

où nous avons remplace f_Z par f_Υ puisque le choix d'un w_Z (ou d'un f_Z) revient à choisir un relèvement quantique.

Cette théorie abstraite s'applique au cas d'une particule chargée soumise au champ d'un monopole.

Les translations temporelles sont par exemple des symétries auxquelles nos formules associent l'énergie $H = mv^2/2$.

Un peu plus subtile est le cas des rotations qui laissent le terme cinétique Θ_0 invariant tandis que le potentiel-vecteur change selon (I.4.1). (II.3.9) fournit alors le moment angulaire

$$\mathbf{l} = \mathbf{m} \times m\boldsymbol{v} - eg\,\mathbf{x}/|x| \tag{II.3.9}$$

avec le célèbre contribution «spin de l'isospin» [18, 20] du champ de jauge symétrique.

Mais il existe d'autre symétries moins connues. Il s'agit des *dilatations* et des *expansions* (I.5.1 - 2) auxquelles correspondent les champs de vecteurs sur l'espace-temps [27]

$$x_\delta(\mathbf{x}, t) = (-\delta/2\,\mathbf{x}, -\delta\, t), \qquad \delta \in R \tag{II.3.10}$$

et

$$X_\kappa(\mathbf{x}, t) = (-\kappa t\,\mathbf{x}, -\kappa t^2), \qquad \kappa \in R. \tag{II.3.11}$$

Ces champs de vecteurs se relèvent canoniquement à l'espace d'évolution:

$$Z_\delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{v}, t) = ((-\delta/2)\,\mathbf{x}, (\delta/2)\,\boldsymbol{v}, -\delta t), \qquad \delta \in \mathbb{R} \tag{II.3.12}$$

$$Z_\kappa(\mathbf{x}, \boldsymbol{v}, t) = (-\kappa t\,\mathbf{x}, -\kappa\,(\mathbf{x} - \boldsymbol{v}\,t), -\kappa t^2) \tag{II.3.13}$$

$L_{Z_\delta}\Theta_0 = 0$ pour le premier tandis que pour le deuxième nous avons

$$L_{Z_\kappa}\Theta_0 = \mathrm{d}(-m\,|x|^2/2)\,\kappa\ . \tag{II.3.14}$$

Le terme d'interaction est, par contre, complètement invariant puisque ces champs de vecteurs se projettent sur 0 sur la 2-sphere . Par conséquent $\mathbb{F}(X, .) = = 0$.

Les constantes du mouvement sont calculées par (II.3.3):

$$\boxed{\begin{aligned} D &= -m\,\boldsymbol{v}(\mathbf{x} - \boldsymbol{v}t)/2 && \text{(II.3.15)} \\ K &= -m(\mathbf{x} - \boldsymbol{v}t)^2/2\quad . && \text{(II.3.16)} \end{aligned}}$$

Ces expressions coincident avec celles de Jackiw [25] si on y substitue la valeur de l'énergie.

Les mêmes quantités conservées auraient pu être retrouvées évidemment par le formalisme préquantique aussi. Les relèvements préquantique de (II.3.13 - 14) s'écrivent en effet

(II.3.17) $\Upsilon_\delta = (Z_\delta, 0)$ (dilatations)

et

(II.3.18) $\Upsilon_\kappa = (Z_\kappa\,,\ \kappa\widetilde{(-m\,|\,x\,|^2/2)(\zeta)}) = (Z, \zeta\kappa(im\,|\,x\,|^2/2\hbar)$

où Z_δ resp. Z_κ dénotent (II.3.13) et (II.3.14) respectivement, et nous avons utilisé l'écriture (II.2.1.a).

4. § SYMÉTRIES PRÉQUANTIQUES

L'expression «symétrie préquantique» a été introduite au paragraphe précédent sans en donner une justification. C'est ce que nous tentons de faire maintenant. Intuitivement, une *symétrie préquantique* est une transformation qui *change le facteur de Feynman à un équivalent*.

Soit en effet (V, σ) un système admissible et (W, ω) sa préquantification. Considérons une symétrie préquantique Υ et sa projection Z sur V. Ces champs de vecteurs engendrent des groupes à'un paramètre de difféomorphismes

(II.4.1) $h_t = \exp(t\,\Upsilon)$

et

(II.4.2) $g_t = \exp(tZ)$.

Ces transformations satisfont pour tout t aux conditions

(II.4.3.a) $h_t^*\omega = \omega$

(II.4.3.b) $h_t \cdot z = z \cdot h_t,$ $z \in U(1)$

(II.4.4) $\pi \circ h_t = g_t$

(II.4.5) $g_t^*\sigma = \sigma.$

Nous résumons ces propriétés en disant que le *(pré)quantomorphisme* h_t se projette, en un symplectomorphisme (symétrie classique) g_t. La forme local de h_t est trouvée grave aux propriétés ci-dessus

(II.4.6) $h_t(u, z) = (g_t(u), F_t(u)\,z), (u, z) \in V \times U(1).$

La facteur multiplicatif $F_t(u)$ s'obstient explicitement en intégrant (II.3.6):

(II.4.7) $$F_t(u) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_u^{g_t(u)} w_Z(g_S(u)\,\mathrm{d}s\right].$$

Cette formule nous montre que l'apparition du facteur F_t est dûe à la non-

-invariance de Θ sous l'action de g_t.

Considérons maintenant un chemin γ arbitraire dont les extrémités sont contenues dans le domaine d'une section. Le facteur de Feynman se calcule, comme nous l'avons vu au §2., par

(II.4.8) $$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right] = \frac{z_0}{z_1}$$

où nous avons considéré un relèvement horizontal $\bar{\gamma}$ de γ passant par $(\gamma(0), z_0)$ et dont l'autre extrémité est $\bar{\gamma}(1) \simeq (\gamma(1), z_1)$.

Considérons maintenant le chemin $g_t(\gamma)$ V. Son facteur de Feynman se calcule par la formule (II.4.8) où nous pouvons choisir le relèvement horizontal $(\overline{g_t(\gamma)})$ qui passe par $h_t(\bar{\gamma}(0))$. Or, les propriétés (II.4.3.a-b) impliquent qu'un préquantomorphisme *préserve l'horizontalité*:

(II.4.9) $$(\overline{g_t(\gamma)}) = h_t(\bar{\gamma})$$

par conséquent le facteur de Feynman associé à $g_t(\gamma)$ est

(II.4.10) $$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S(g_t(\gamma))\right] = \frac{F_t(\gamma(0))z_0}{F_t(\gamma(1))z_1} = \frac{F_t(\gamma(0))}{F_t(\gamma(1))} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right].$$

Le nouveau facteur de Feynman est relié à l'ancien par un *facteur de phase inobservable*. Ceci est vrai à une restriction près: le facteur multiplicatif F_t ne peut pas dépendre de la vitesse.

Comme première application étudions les rotations de l'espace. L'avantage du formalisme géométrique est qu'il rend possible un calcul direct sans passer par des expressions locales.

Soit $r \in SU(2)$ un rotation arbitraire. Elle opère sur l'espace d'évolution

(II.4.11) $$g(\mathbf{x}, v, t) = (r(\mathbf{x}), r(\boldsymbol{v}), t).$$

Cette action préserve le forme σ. Elle préserve aussi le terme cinétique Θ_0. Son relèvement quantique est obtenu par conséquent en relevant l'action de r sur Q à P. Mais c'est très facile: $SU(2)$ opère sue $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$ par multiplication matricielle

(II.4.12) $$\zeta \to r\,\zeta \quad r \in SU(2),\ \zeta \in \mathbb{S}^3$$

cette action préserve évidemment la forme de connection (I.3.4.b). On obtient donc

(II.4.13) $$h(x\ v\ t; \zeta) = (g(x, v, t); r\,\zeta).$$

Exprimons le facteur de phase F_r dans la trivialisation locale (I.3.9). Soient

$(\Theta_0, \phi_0, \chi_0)$ et $(\Theta_1, \phi_1, \chi_1)$ les angles d'Euler de ζ et de $r\,\zeta$ respectivement. (I.3.9) fournit immédiatement [13, 35]

$$F_r = e^{in(\Theta_1 + \chi_1 - \Theta_0 - \chi_0)}. \tag{II.4.14}$$

Une formule explicite en termes des paramètres de la rotation r peut être obtenue en utilisant les règles de composition des angles d'Euler.

Considérons maintenant les dilatations et les expansions.

(I.5.1) et (I.5.2) se relèvent à l'espace d'évolution

$$g_\delta(x, v, t) = (e^{-\delta/2}\mathbf{x}, e^{\delta/2}\boldsymbol{v}, e^{-\delta}t) \tag{II.4.15}$$

et

$$g_\kappa\,(x, v, t) = (\mathbf{x}/(1 - \kappa t), (1 - \kappa t)\boldsymbol{v} + \mathbf{x}, t/(1 - \kappa t)). \tag{II.4.16}$$

Les relèvements quantiques sont obtenus en substituant (II.3.14) dans (II.4.7). Le calcul donne

$$h_\delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{v}, t; \zeta) = (g_\delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{v}, t); \zeta) \tag{II.4.17}$$

et

$$h_\kappa\,(\mathbf{x}, \boldsymbol{v}, t; \zeta) = (g_\kappa\,(\mathbf{x}, \boldsymbol{v}, t); \zeta\, e^{im\,|\mathbf{x}|^2/2\hbar(1 - \kappa t)}). \tag{II.4.18}$$

Le facteur de phase est $F_\delta = 1$ pour les dilatations,

$$F_\kappa\,(\mathbf{x}, \boldsymbol{v}, t) = e^{im\,|\mathbf{x}|^2/2\hbar(1 - \kappa t)} \tag{II.4.19}$$

pour les expansion.

Chapitre III.

QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE

1.§ THÉORIE ABSTRAITE

Soit (M, σ) une variété symplectique et supposons qu'il existe un fibré en cercle Y au dessus de M muni d'une connection ω et dont la courbure est $\sigma/\hbar$.

Une sous-variété de M est appelée isotrope si le pull-back par l'inclusion de la forme symplectique σ à la sous-variété considéré est identiquement nul. Une *polarisation réelle* F est un feuilletage de M par des sous-variétés isotropes maximales.

Soit F une polarization réelle de (M, σ). La restriction du fibré Y à une feuille quelconque de F est un fibré sans courbure à cause de l'isotropie. Supposons les feuilles simplement connexes. Soient m_1 et m_2 deux points arbitraires d'une feuille reliés par les courbes γ_1 et γ_2 contenues elles aussi la feuille considérée. Relevons horizontalement à Y ces courbes à travers le même point. Le theorème de Stokes garantit que les relèvements finissent au même point de Y. Ceci permet de relever toute la feuille horizontalement en relevant les courbes contenues dans la feuille. Nous obtenons de cette manière un feuilletage de Y par des sous-variétés maximales horizontales, c'est à dire une *polarisation de Planck* $\mathscr{F}$ [16].

Supposons ces feuilletage sécables c'est à dire que $Y/\mathscr{F}$ et M/F sont des variétés. $Y/\mathscr{F}$ est alors un fibré en cercle au dessus de M/F.

Rappellons la définition d'une *semi-densité* sur une variété [14, 30, 34]: Soit V une variété de dimension n. $B(V)$, le fibré des repères de V, est un fibré principal avec groupe structural $GL(n, R)$ [4]. Une semi-densité est une fonction complexe ν sur $B(V)$ tel que

$$\nu(bg) = |\det g|^{1/2} \nu(b), b \in B(V), g \in GL(n, R). \tag{III.1.1}$$

L'espace vectoriel des semi-densités à support compact de V est muni d'une structure préhilbertienne si l'on pose

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle = \int_V \bar{\nu}_1 \nu_2 . \tag{III.1.2}$$

Un difféomorphisme arbitraire a de V se relève canoniquement à un isomorphisme A du fibré $B(V)$. La formule

(III.1.3) $\quad (\hat{a}\,\nu)\,(b) := \nu(Ab), \qquad b \in B(V)$

fait opérer a sur les semi-densités. (III.1.3) définit un *opérateur unitaire* sur l'espace des semi-densités (puisque $|\,\nu\,|^2$ est une densité de V).

Un champ de vecteurs Z sur V se relève aussi à $B(V)$ d'une manière canonique selon un champ de vecteurs ζ qui est invariant par l'action de $GL(n, \mathbb{R})$. La dérivée de Lie d'une semi-densité ν est définie comme la dérivée de Lie de la fonction ν sur $B(V)$ par le champ de vecteurs ζ. En particulier si la variété considérée est un fibré en cercle C au dessus de B, (III.1.3) fait opérer $U(1)$ sur les semi-densités de C. Celles qui vérifient la «condition de circulation»

(III.1.4) $\quad \hat{z}(\nu) = z\nu, \qquad z \in U(1)$

seront appelées équivariantes. En choisissant la semi-densité sur $U(1)$ définie par la mesure de Haar normalisée («$d\varphi/2\pi$», φ étant la variable angulaire), une semidensité équivariante de C s'identifiera avec un produit tensoriel

(III.1.5) $\quad \Phi \cdot \nu$

où Φ est une fonction équivariante sur C et ν est une semi-densité sur la base B. Si cette base est une variété riemannienne orientable, la racine carrée de l'élément de volume $\sqrt{dq}$ est une semi-densité; l'écriture (III.1.5) (avec $\nu = \sqrt{dq}$) permet d'identifier les semidensités avec des fonction équivariantes sur le fibré C.

L'Ansatz de la quantification géométrique est de considérer *l'espace de Hilbert des fonctions* d'onde comme composé de *semi-densités équivariantes sur* $Y/\mathscr{F}$:

(III.1.6) $$\mathscr{H}_F = \left\{ \Phi\nu \;\middle|\; \begin{array}{l} \Phi : Y \to \mathbb{C} \text{ fonction équivariante} \\ \Phi \text{ constante sur les feuilles de } \mathscr{F} \\ \nu \text{ semi-densité sur } M/F \end{array} \right\}$$

Un difféomorphisme g de M *préserve la polarisation* F si l'image par g de toute feuille de F est contenue dans une feuille de F.

Soit h un préquantomorphisme de Y (définition (II.4.3.a-b) dont la projection g sur M préserve la polarisation F. Dans ce cas h préserve la polarisation de Planck $\mathscr{F}$ puisque tout préquantomorphisme préserve l'horizontalité. Un tel préquantomorphisme se projette selon un isomorphisme a de $Y/\mathscr{F}$ qui à son tour se projette selon un difféomorphisme b de M/F. En particulier, l'image par h d'une semi-densité équivariante qui est constante sur les feuilles de $\mathscr{F}$ continue à avoir ces propriétés. L'opérateur (III.1.3) s'écrit alors

(III.1.7) $\quad \hat{h}(\Phi\nu) = (\Phi \circ h)\,(\hat{b}\,\nu).$

C'est un *opérateur unitaire sur* $\mathscr{H}_F$.

Soit Υ une *symétrie préquantique* se projetant sur la symétrie classique Z sur M. Nous dirons qu'elle préserve la polarisation si les groupes à un paramètre $h_t = \exp t\Upsilon$ et $g_t = \exp tZ$ ont cette propriété pour tout t (pour lesquels ils sont définis).

(III.1.8) $$t \to \hat{h}_t$$

est un *groupe unitaire à un paramètre* de $\mathscr{H}_F$. *L'observable quantique* qui correspond à la symétrie préquantique Υ – où à l'observable classique $f := \hbar\omega(\Upsilon)$ – est le générateur infinitésimal de ce groupe unitaire à un paramètre. Or, (III.1.7) implique que c'est

(III.1.9) $$\hat{f}(\Phi\nu) = -i\hbar L_\Upsilon(\Phi\nu) = (-i\hbar L_\Upsilon\Phi)\,\nu - i\hbar\Phi L_X\nu.$$

C'est un opérateur essentiellement auto-adjoint. (X est ici la projection sur M/F de Z). La formule (II.3.7) implique, compte tenu de (I.4.15), que (III.1.9) s'écrit aussi

(III.1.10) $$\hat{f}(\Phi\nu) = (-i\hbar L_{\tilde{Z}}\Phi + f\,\Phi)\,\nu - i\hbar\Phi L_X\nu.$$

Soit Φ une fonction constante sur les feuilles d'une polarisation de Planck $\mathscr{F}$ que est le relèvement d'une polarisation F de M. (III.1.6) implique que Φ est covariamment constante par rapport des vecteurs tangents à F:

(III.1.11) $$L_{\tilde{Z}}\Phi = 0 \qquad \forall Z \text{ tangent aux feuilles de } F.$$

Soit s une section de $Y/\mathscr{F}$ au dessus de M/F. Elle engendre une section (notée aussi s) de Y au dessus de M. Posons, pour une fonction équivariante Φ, $\varphi = s^*\Phi$. (III.1.11) exprime alors que

(III.1.12) $$Z(\varphi) - (i/\hbar)\,\Theta(Z)\,\varphi = 0 \quad \forall Z \text{ tangent à } F$$

où nous avons écrit $\Theta = s^*\omega$.

Un quantomorphisme h de Y s'écrit dans la trivialisation locale associée à la section s à l'aide de

(III.1.13) $$h(m, z) = (g(m), F_h(m)\cdot z), \quad (m, z) \in M \times U(1).$$

L'opérateur (III.1.7) devient par conséquent, pour des h qui préservent la polarisation,

(III.1.14) $$\hat{h}(\varphi\nu) = (F_h \cdot \varphi(g)) \cdot (\hat{b}\,\nu).$$

Soit Υ une symétrie préquantique se projetant selon la symétrie classique Z qui préserve la polarisation. (III.1.10) devient

(III.1.15) $$\hat{f}(\varphi\nu) = (-i\hbar L_Z \varphi - \Theta(Z)\,\varphi + f\,\varphi)\nu - i\hbar\varphi L_X \nu.$$

2.§ RÉALISATION SUR L'ESPACE D'ÉVOLUTION

La théorie abstraite exposée au paragraphe précédent peut être réalisée sur l'espace d'évolution (V, σ). Supposons le feuilletage caractéristique de σ dans V sécable et considérons le quotient

(III.2.1) $$M := V/\ker\sigma$$

M, muni de la structure symplectique induite, est une variété symplectique. Souriau l'appelle *la variété des mouvements*.

Soit (V, σ) admissible du point de vue quantique, et soit (W, ω) sa préquantification. Considérons le feuilletage caractéristique de la forme quantique ω dans W. C'est un feuilletage unidimensionnel; ses courbes integrales sont les relèvements horizontaux à W des courbes caractéristiques de σ dans V. Etant donné que l'action de $U(1)$ sur W préserve la horizontalité, la variété

(III.2.2) $$Y := W/\ker\omega \cap \ker d\omega$$

est un fibré en cercle au dessus de M. La forme ω passe au quotient par construction. Elle y définit une forme de connexion que nous noterons encore ω. La courbure de ω est $\sigma/\hbar$. (Y, ω) devient ainsi une préquantification de (M, σ). Si M est simplement connexe ce que nous supposerons désormais, (M, σ) n'admet qu'une préquantification.

Soit Z une symétrie classique sur V. Elle se projette selon un champ de vecteurs sur M que nous noterons encore Z et qui satisfait aussi $L_Z\sigma = 0$. D'une manière analogue une symétrie préquantique Υ sur W se projette sur Y à une champ de vecteurs Υ qui est invariant par l'action de $U(1)$ sur Y et vérifie $L_\Upsilon\omega = 0$.

Les moments – solutions de (II.3.4) – calculés sur V ou sur M coindicent d'après le théorème de Noether.

Les faits ci-dessus justifient la terminologie anticipée.

Un *espace de phase* est une section de V à temps constant. L'application qui fait correspondre à un point de V le mouvement classique passant par ce point est une application différentiable de sur M. Sa restriction sur un espace de phases n'est pas nécessairement surjective: on laisse échapper les mouvements qui seraient déjà finis ou pas encore commencés. C'est le cas en particulier d'une particule chargée dans le champ d'un monopole où il existent des chutes sur le monopole. La structure globale de la variété des mouvements n'est pas connue dans ce cas. Nous excluons les chutes dans la suite et considérons seulement la sous-variété ouverte des mouvements éternels que nous noterons encore M.

L'étape suivante est de choisir une polarisation réelle. Posons, pour tout $q \in Q$,

$$(\text{III.2.3}) \qquad F_q := \left\{ \begin{array}{l} \text{réunion des mouvements classiques qui} \\ \text{passent par } q \text{ à l'instant} \quad t = 0 \end{array} \right\}$$

PROPOSITION. $F := \cup \{F_q \mid q \in Q\}$ *est une polarisation réelle.*

Démonstration. Soit $(x, v, t) \in V$ arbitraire et considérons le mouvement classique unique γ qui passe par ce point de V. *L'évolution classique* est l'application $U_\tau(x, v, t) = \gamma(\tau)$. U_τ est un difféomorphisme de V qui laisse invariante la forme $\sigma : (U_\tau)^* \sigma = \sigma$. La feuille F_q est alors l'image par $U_t : t \in R$ de la sous-variété $\{(q, . , 0)\}$. En particulier,

$$(\text{III.2.4}) \qquad T_{(x,v,t)} F_q = (U_t)_* T_{(q,v_0,0)} F_q$$

$T_{(q,v_0,0)} F_q$ est à son tour engendré par $\partial/\partial v \oplus \operatorname{Ker} \sigma$ et par conséquent $\sigma(X, Y) = 0$ pour tout X, Y tangent à F_q à $(q, v_0, 0)$. Mais (III.2.4) implique alors, compte tenu de l'invariance de σ par U_t, que $\sigma \mid F_q = 0$. En d'autre termes F_q est isotrope. Mais elle est aussi maximale puisque elle a dimension $(n + 1)$ où $n = \dim Q$. Ayant exclu les chutes nous avons ainsi un feuilletage isotrope et maximal.

La polarisation de Planck correspondante est obtenue en relevant horizontalement les courbes contenues dans les feuilles de F_q:

$$(\text{III.2.5}) \qquad \mathscr{F}_q = \{\bar{\gamma} \subset W \mid \gamma \subset F_q\}.$$

Observons que les feuilles de F sont en bijection avec les points de Q, ce qui permet d'identifier M/F à Q «à l'instant 0».

Considérons maintenant le fibré principal $W/\mathscr{F}$. Sa classe de Chern est donné par la classe de cohomomogie $\sigma/\hbar$. Or, (II.17) montre qu'elle est identique à celle de $e\,\mathbb{F}/\hbar$ qui est, à son tour, la classe de Chern de P. Par conséquent $W/\mathscr{F}$ est isomorphe à P.

Supposons que l'espace de configuration Q est une variété riemannienne orientable possédant ainsi un élément de volume $\mathrm{d}q \cdot \sqrt{\mathrm{d}q}$ est une semi-densité sur Q. Soit ρ_F l'application $V \to Q$ qui fait correspondre q aux points de la feuille F_q. Nous choisirons la semidensité

$$(\text{III.2.6}) \qquad \nu := \rho_F^*(\sqrt{\mathrm{d}q})$$

sur $V/F \simeq M/F$. Les fonctions d'onde (III.1.6) deviennent alors

$$(\text{III.2.7}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad \Phi : W \to \mathbf{C} \text{ équivariante} \\ \Phi\nu \mid \Phi \text{ constante sur les feuille de (III.2.5)} \\ \nu \text{ est donné par (III.2.6)} \end{array} \right.$$

Soit h un quantomorphisme de (W, ω) se projettant selon le symplectomorphisme g de (V, σ). Si g (resp. h) préserve la polarisation (de Plank) F (resp. $\mathscr{F}$), ils se projettent selon un difféomorphisme b (resp. un isomorphisme de fibré a) sur $M/F \simeq Q$ (resp. $W/\mathscr{F} \simeq P$). L'opérateur unitaire associé s'écrit

$$\hat{h}(\Phi \cdot \nu) = (\Phi \circ h) \cdot (\hat{g}(\nu)) = (\Phi \circ h) \cdot (\rho_F^* \hat{b}(\sqrt{\mathrm{d}q})). \tag{III.2.8}$$

De manière similaire, considérons une symétrie préquantique Υ de W telle que $h_t = \exp t\,\Upsilon$ préserve la polarisation. Soit son «moment quantique» $f = \hbar\omega(\Upsilon)$, Z sa projection sur V. Υ (resp. Z) se projettent alors sur des champs de vecteurs ξ (resp. X) sue $P \simeq W/\mathscr{F}$ (resp. $Q \simeq M/F$). L'opérateur auto-adjoint (III.1.9) devient

$$\begin{aligned}\hat{f}(\Phi \cdot \nu) &= (-i\hbar L_\Upsilon \Phi) \cdot \nu - i\hbar\Phi \cdot L_Z(\nu) = \\ &= (i\hbar L_\Upsilon \Phi) \cdot \nu - i\hbar\Phi \cdot \rho_F^*(L_X \sqrt{\mathrm{d}q}).\end{aligned} \tag{III.2.9}$$

L'identification $W/\mathscr{F} \simeq P$ permet de calculer ces opérateurs sur P.

Les fonctions équivariantes sur W qui sont constantes sur les feuilles de $\mathscr{F}$ sont en effet les images réciproques des fonctions équivariantes sur P. Les opérateurs (III.2.8) et (III.2.9) deviennent alors

$$\hat{h}(\Psi\sqrt{\mathrm{d}q}) = (\Psi \circ a)\,(\hat{b}(\sqrt{\mathrm{d}q})) \tag{III.2.10}$$

et

$$\hat{f}(\Psi\sqrt{\mathrm{d}q}) = (-i\hbar L_\xi \Psi)\sqrt{\mathrm{d}q} - i\hbar\Psi L_X \sqrt{\mathrm{d}q}. \tag{III.2.11}$$

Ces formules ressemblent à celles du Chapitre I. En particulier, si X est un vecteur de Killing pour la métrique de Q, $L_X\sqrt{\mathrm{d}q} = 0$ et (III.2.11) est formellement identique (à la semi-densité $\sqrt{\mathrm{d}q}$ près) à (I.4.16). Mais ne nous trompons pas. Le champ de vecteurs ξ n'est pas nécessairement le même qu'au chapitre I. Ils sont identiques seulement si Z, le relèvement canonique de X à V laisse invariante la forme cinétique Θ_0 et est simultanément une symétrie du champ de jauge. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, comme c'est le cas des expansions (voir paragraphe suivant) le relèvement direct de X par rapport à α est différent de la projection de Υ par $W \to P$. Cette distinction devient apparente de la formulation locale.

Soit en effet s une section locale de P au dessus de Q. Elle engendre une section locale de W au dessus de V que nous noterons aussi par s. Définissons les fonctions d'onde dans la jauge s par

$$\psi(g) = \Psi(s(q)) \tag{III.2.12}$$

et

(III.2.13) $\varphi(x, v, t) = \Phi(s(x, v, t)).$

Soit $(x, v, t, z) \in V \times U(1)$ arbitraire et considérons le mouvement classique unique γ qui passe par (x, v, t). Soit $\bar{\gamma}$ son relèvement horizontal qui passe par (x, v, t, z). $\bar{\gamma}(0) \simeq (q, v_0, z_0)$ où

(III.2.14) $$z_0 = \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x, v, t)\right] z$$

la fonction $S : V \to C$ ici est *l'action classique* calculée le long de γ entre les dates 0 et t.

Les points de Y sont des classes d'équivalences de points de W où (x, v, t, z) est équivalente à (x', v', t', z') si (x, v, t) et (x', v'', t') sont sur le même mouvement classique γ et $z' = \exp\,[(-i/\hbar)\int_t^{\mu} \Theta]z$.

La projection $W \to P$ s'écrit localement

(III.2.15) $$\mathscr{F}_q \ni (x, v, t, z) \to \left(q, \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] z\right).$$

Il est instructif d'établir la correspondence entre les fonctions d'onde usuelles (III.2.12) et celles de (III.2.13). Le fait d'être constante sur les feuilles donne, compte tenu de l'équivariance,

$$z\,\varphi(x, v, t) = \Phi(x, v, t, z) = \Phi(\bar{\gamma}(0)) = \Phi(q, v_0, 0, z_0) =$$
$$= z_0\varphi(q, v, 0) = z_0\varphi(q).$$

En résumant, de (III.2.14) nous obtenons

(III.2.16) $$\varphi(x, v, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x, v, t)\right] \psi(q).$$

Cette formule permet d'interpréter la quantification géométrique comme une règle pour étendre les fonctions d'onde à l'espace d'évolution.

Soit Υ une symétrie préquantique sur W et soit Z sa projection sur V. Localement

$$\Upsilon = \left(Z, -\frac{i}{\hbar} w\, z\right).$$

Si Z préserve la polarisation F, l'opérateur (III.1.9) (ou (III.2.9) s'écrit localement

(III.2.17) $$\hat{f}(\varphi\nu) = (-i\hbar L_Z\varphi + (-\Theta(Z) + f)\varphi)\nu - i\hbar\varphi\ \rho_F^*(L_X\sqrt{\mathrm{d}q})$$

En y substituant (III.2.16) et en utilisant

$$L_Z S = L_Z\left(\int_0^t \Theta\right) = \int_0^t L_Z\Theta = \int_\gamma \mathrm{d}(\Theta(Z)) - \int_\gamma \sigma(Z, .) =$$

$$\Theta_{\gamma(t)}(Z(\gamma(t))) - \Theta_{\gamma(0)}(Z(\gamma(0)))$$

(puisque $\dot{\gamma} \in \ker\sigma$, γ étant un mouvement classique), on obtient

(III.2.18) $$\hat{f}(\psi\sqrt{\mathrm{d}q}) = (-i\hbar L_X\psi + (-\Theta(Z_0) + f_0)\psi)\sqrt{\mathrm{d}q} - i\hbar\psi L_X\sqrt{\mathrm{d}q}$$

où nous avons écrit $Z_0 = Z(.,.,0), f_0 = f(.,.,0)$.

Comparons (III.2.18) et (I.4.6): tandis que dans (III.2.18) le terme multiplicatif est

$$w_0 = -\Theta(Z_0) + f_0 = L_Z\Theta|_{t=0}$$

dans (I.4.6) on a obtenu

$$ea = e(-A(X) + u) = e\,L_X A.$$

Ceci montre que ces termes sont identiques seulement si $L_Z\Theta_0|_{t=0} = 0$, puisque $\Theta = \Theta_0 + eA$.

Similairement, considérons un préquantomorphisme h se projettant sur le symplectomorphisme g qui préserve la polarisation. (III.2.8) se traduit en termes locaux donnant

(III.2.19) $$\hat{h}(\varphi\nu) = (F_h \cdot \varphi \circ g)\,(\hat{g}\nu)$$

où nous avons utilisé (II.4.6) et l'équivariance de la fonction d'onde géometrique Φ.

La formule correspondante en termes de fonctions d'onde usuelles (III.2.12) et obtenue à l'aide de (III.2.15):

(III.2.20) $$\hat{h}(\psi\sqrt{\mathrm{d}q})(q) = \left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(g(q,v,0))\right]F_h(q,v,0)\,\psi(b(q))\right)(\hat{b}\sqrt{\mathrm{d}q})$$

où b est la projection sue Q de $g: V \to V$.

3.§ APPLICATION: LES SYMÉTRIES CACHÉES DU MONOPOLE

Considérons les dilatations (II.3.10) et les expasions (II.3.11). Elles sont, comme nous l'avons vu, des symétries classiques. Or elles préservent aussi la polarisation (III.2.3). En effet, l'image par un symplectomorphisme d'une courbe caractéristique de σ est encore une courbe caractéristique. Par conséquent pour que la polarisation soit préservée il suffit qu'elle la soit à un instant arbitraire, à $t = 0$ par example. Mais c'est vrai:

(III.3.1) $\qquad F_q \to F_{(e^{\delta/2}q)}$ $\qquad$ pour une dilatation

(III.3.2) $\qquad F_q \to F_q$ $\qquad$ pour une expansion.

D'après (II.3.14)

(III.3.3) $\qquad \mathrm{d}w_{\delta}\,_{|t=0} := L_{Z_\delta}\Theta|_{t=0} = 0$

et

(III.3.4) $\qquad \mathrm{d}w_{\kappa}\,|_{t=0} = -\Theta(Z_\kappa)|_{t=0} + f_\kappa\,|_{t=0} = \mathrm{d}(-mq^2/2).$

D'autre part

$$L_{X_\delta}(\mathrm{d}q) = L_{(-\delta/2)\mathbf{q}}(\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3) = -3\delta/2\,\mathrm{d}q$$

et par conséquent

(III.3.5) $\qquad L_{X_\delta}\sqrt{\mathrm{d}q} = -3\,\delta/4\sqrt{\mathrm{d}q}$

et

(III.3.6) $\qquad L_{X_\kappa}\sqrt{\mathrm{d}q} = 0$

puisque $X_\kappa(q, 0) = 0$.

La formule III.2.18 nous fournit alors

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{D} = \frac{i\hbar}{2}\left(r\partial/\partial r + \frac{3}{2}\right) && \text{(III.3.7)}\\ &\hat{K} = m\,r^2/2 && \text{(III.3.8)}\end{aligned}}$$

où nous avons écrit $r = |q|$. Ces formules sont identiques à celles trouvées par Jackiw [25].

Notons en particulier que le relèvement de $X_\kappa = 0$ sur P par rapport à α devrait être

(III.3.9) $\qquad \tilde{c}$

avec un $c \in \mathbb{R}$ arbitraire. La projection sur $P \simeq W/\mathscr{F}$ de la symétrie préquantique Υ est, par contre,

(III.3.10) $\qquad -\widetilde{(mr^2/2)\kappa}$.

Notons que le Hamiltonien – l'observable quantique associée aux translations temporelles – ne peut pas être calculé par (III.2.18), étant donné que les translation temporelles ne préservent pas la polarisation choisie.

Indiquons finalement que les opérateurs unitaires associés aux dilatations et expansions finies sont obtenus soit en intégrant (III.3.7 - 8) directement, soit en substituant (II.4.17 - 18) dans (III.2.20):

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{i\hat{D}\delta/\hbar}\psi(q) = e^{3i\delta/4}\,\psi(e^{-\delta/2}q) && \text{(III.3.11)} \\ &e^{i\hat{K}\kappa/\hbar}\psi(q) = e^{i\kappa\, mq^2/2\hbar}\,\psi(q) && \text{(III.3.12)} \end{aligned}}$$

References

[1] P.A.M. DIRAC, *Quantized Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London, **A133**, p. 60 (1931).

[2] P.A.M. DIRAC, *The Theory of Magnetic Poles*, Phys. Rev. **74**, p. 817 (1948).

[3] B. CABRERA, *First Results from a Superconductive Detector for Moving Magnetic Monopoles*, Phys. Rev. Lett. **48**, p. 1378 (1982).

[4] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I. (1963) and Vol. II. (1968), Interscience, New York.

[5] J. SNIATYCKI, *Prequantization of Charge*, J. Math. Phys. **15**, p. 615 (1974).

[6] W. GREUB and H.R. PETRY, *Minimal Coupling and Complex Line Bundles*, J. Math. Phys. **16**, p. 1347 (1975).

[7] A. TRAUTMAN, *Solutions of the Maxwell and Yang-Mills Equations Associated with Hopf Fibrings*, Int. J. Theor. Phys. **16**, p. 561 (1977).

[8] A.P. BALACHANDRAN, G. MARMO, B.S. SKAGERSTAM, A. STERN, *Magnetic Monopoles with no Strings*, Nucl. Phys. **B162**, p. 385 (1980).

[9] J.L. FRIEDMAN and R. SORKIN, *Dyon-Spin and Statistics: A Fibre Bundle Theory of Interacting Magnetic and Electric Charges*, Phys. Rev. **D20**, p. 2511 (1979).

[10] T.T. WU and C.N. YANG, *Concept of Non-Integrable Phase Factors and Global Formulations of Gauge Fields*, Phys. Rev. **D12**, p. 3845 (1975).

[11] T.T. WU and C.N. YANG, *Dirac Monopoles without Strings: Monopole Harmonics*, Nucl. Phys. **B107**, p. 365 (1976).

[12] T.T. WU and C.N. YANG, *Dirac's Monopole without Strings: Classical Lagrangian Theory*, Phys. Rev. **D14**, 347 (1976).

[13] P.A. HORVÁTHY, *Rotational Symmetry and Dirac's Monopole*, Int. J. Theor. Phys. **20**, p. 697 (1981).

[14] D.J. SIMMS and N.M.J. WOODHOUSE, *Lectures on Geometric Quantization*, Springer Lecture Notes in Physics **53**, (1976).

[15] B. KOSTANT, *Quantization and Unitary Representations*, Springer Lecture Notes in Mathematics **170**, p. 87 (1980).

[16] J.-M. SOURIAU, *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod, Paris (1970).

[17] P. FORGÁCS and N. MANTON, *Space-Time Symmetries in Gauge Theories*, Comm. Math. Phys. 72, p. 15 (1980).

[18] R. JACKIW and N. MANTON, *Symmetries and Conservation Laws in Gauge Theories*, Ann. Phys. (N.Y.) **127**, p. 257 (1980).

[19] J. HARNAD, S. SHNIDER, L. VINET, *Group Actions on Principal Bundles and Invariance Conditions for Gauge Fields*, J. Math. Phys. **21**, p. 2719 (1980).

[20] C. DUVAL and P.A. HORVÁTHY, *Practicles with Internal Structure: The Geometry of Classical Motions and Conservation Laws*, Ann. Phys. (N.Y.) **142**, p. 10 (1982).

[21] R.P. FEYNMAN and A.R. HIBBS, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, N.Y. (1965).

[22] P.A. HORVÁTHY, *Classical Action, the Wu-Yang Phase Factor and Prequantization*, Proc. Int. Coll. Diff. Geom. Maths. in Math. Phys., Aix-en-Provence '79, Ed. Souriau, Springer Lecture Notes in Math. **836**, p. 68 (1980).

[23] R. HERMANN, *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Academic Press (N.Y.), (1968).

[24] P.A. HORVÁTHY and L. ÚRY, *Analogy between Dynamics and Satitics-Related to Variational Mechanics*, Acta Physica Hungarica, **42**, p. 251 (1977).

[25] R. JACKIW, *Dynamical Symmetry of the Magnetic Monopole*, Ann. Phys. **129**, p. 183 (1980).

[26] P.A. HORVÁTHY, *The Dynamical Symmetries of the Monopole in Geometric Quantization*, Lett. Math. Phys. 7, p. 353 (1983).

[27] C. DUVAL, *Quelques Procedures Géométriques en Dynamique des Particules*, Thèse de doctorat d'Etat, Marseille (1982).

[28] U. NIEDERER, *The Maximal Kinematical Invariance Group of the Free Schrödinger Equation*, Helvetica Physica Acta **45**, p. 802 (1972).

[29] G. BURDET, M. PERRIN, P. SORBA, *On the Explicit-Time-Dependent Invariance Properties of Quantum Mechanical Systems*, J. Math. Phys. **15**, p. 2253 (1974).

[30] J.-M. SOURIAU, *Construction Explicite de l'indice de Maslov. Applications*, in Proc. IVth. Int. Coll. on Group Theoretical Methods in Phys., Nijmegen '75, Springer Lecture Notes in Phys. **50** (1976).

[31] D.J. SIMMS, *Geometric Quantization and the Feynman Path Integral*, in Feynman Path Integrals, Proceedings, Marseille '78 Springer Lect. Notes in Phys. **106**, p. 220 (1979).

[32] A.S. GOLDHABER, *Connection of Spin and Statistics for Charge-Monopole Composits*, Phys. Rev. Lett. **36**, p. 1122 (1976).

[33] J.L. FRIEDMANN, R. SORKIN, *A Spin-Statistics Theorem for Composits Containing both Electric and Magnetic Charges*, Comm. Math. Phys. **73**, p. 161 (1980).

[34] R.J. BLATTNER, *Quantization and Representation Theory*, Proc. Symp. Pure Math. (A.M.S.) **26**, p. 147 (1973).

[35] A. FRENKEL and P. HRASKÓ, *Invariance Properties of the Dirac Monopole*, Ann. Phys. **105**, p. 288 (1977).

[36] H.-R. PETRY, *Scattering on Magnetic Monopoles*, Z. für Naturforschung, **35A**, p. 1276 (1980).

[37] Y. KAZAMA, C.N. YANG and A.S. GOLDHABER, *Scattering of a Dirac Particle with Charge Ze by a Fixed Magnetic Monopole*, Phys. Rev. **D15**, p. 2287 (1977).

Manuscript received: September 19, 1984.